ТЕОРИЈА ИГАРА
GAME THEORY

Аутор:

ПЕТАР ПРВУЛОВИЋ, ученик II разреда гимназије "Света Ђорђевић"

Смедеревска Паланка, Регионални центар за таленте Пожаревац*

Ментор:

МИЛОСАВ МИЛЕНКОВИЋ, професор математике

Гимназија "Света Ђорђевић", Смедеревска Паланка

РЕЗИМЕ:

Теорија игара је грана примењене математике која проучава конфликте са утврђеним правилима понашања учесника. Темељ ове области постављен је још средином XIX века али тек после другог светског рата почиње прогресивно да се развија. Примену налази у широком спектру области, првенствено у војној стратегији, која је и дала повода развоју ове области, економији и рачунарству, а затим и у логици, политици, билогији...

Кључне речи: играч, стратегија, конфликт, матрица

SUMMARY:

Game theory is branch of applied mathematics that studies interactions with rational terms of behaviour of competants. The basis of this branch was formalized in the middle XIX century, but is started to be progressivly developed after World War II. It’s uses are found in a wide spectre offields, primary in the military tactics (which gave a motiv for development of this branch in the first place), economy and computer science, and also in logic, political science, biology...

Keywords: player, strategy, interaction, matrix

1. Увод

Теорија игара је грана математике која користи моделе за проучавање конфликата са утврђеним правилима (игара), као и предвиђено и стварно понашање учесника и њихове оптималне стратегије. Први радови у овој области датирају из прве половине деветнаестог века, од радова Курноа и Бертрана, али је општа теорија дата тек 1944. године у Нојмановом и Моргенштерновом раду "Теорија игара и економско понашање" где је показано како се многи проблеми могу успешно моделирати. Још од свог појављивања теорија игара нашла је примене у многим пољима, првенствено војној стратегији и економији, са којом је веома блиско је повезана, а развојем технике и у рачунарству. Примењује се још и у логици, биологији, политици...

2. Материјал и методи рада

2.1 Основне карактеристике

Да би се на анализу игре (конфликта) применио математички модел неопходно је извршити упрошћавање такво да се у обзир узму само фактори који утичу на његов могући исход. Игра, дакле, представља упрошћени модел конфликта, обухватајући притом правила понашања учесника и опредељивања њихових могућих потеза и потенцијалне резултате њиховог избора. При томе је циљ сваког играча да постигне решење које му обезбеђује најповољнији резултат.

Нека је I скуп играча. Пошто ћемо у наставку текста анализирати игре са коначним бројем играча $I \in \{1,2,3,...,n\}$. Основна карактеристика игара је да коначан резултат који ће играч остварити не зависи само од њега, већ и од осталих учесника у игри. Сваки од играча унапред познаје могуће алтернативе које су му на располагању, које називамо стратегијама. Скуп свих стратегија играча i је x_i. Избор неке стратегије $x_i \in x_i$, при чему остаје скуп $x = (x_1,...,x_n)$, играча $i \in I$ називамо ситуација. Скуп свих ситуација једнак је $\prod_{i \in I} x_i$ и означава се са x. Корист играча у ситуацији описује се бројем који изражава степен делотворности његовог интереса. Тај број назива се исплатом играча x и означава се $H_i(x)$. Пресликавање $H_i : x \to R$ зове се функција исплате играча i. Игре се реализују преко појединачних потеза играча. Скуп више потеза чини партију. У овим условима ток конфликта састоји се у избору сваког играча $i \in I$ неке стратегије $x_i \in x_i$ и налажењу резултата у скупу ситуација $x = (x_1,...,x_n)$ из неког извора исплате H_i(x).

2.1.1 Класификација игара

Као критеријуми класификације обично се узимају број играча, број стратегија, карактер функције плаћања и међусобна повезаност играча. Пошто је I, $I \in \{1,2,3,...,n\}$, скуп играча, можемо извршити поделу на игре са 1, 2, 3, ..., n играча. За реализацију игре потребно је најмање два играча, а ако их има три или више јавља се могућност стварања коалиција. Када сваком играчу на располагању стоји коначан број стратегија игру називамо **коначном**. У супротном је то **бесконачна** игра. Према карактеру исплате подела се врши на игре са **нултом** и игре са **ненултом** сумом. Код игре са нултом сумом сума укупног плаћања једнака је нули, тј. укупан добитак једног или више играча једнак је укупном губитку осталих (поражених). Код игара са ненултом сумом укупан добитак није једнак укупном губитку. Зависно од односа играча игре делимо на **кооперативне** и **некооперативне**. Код кооперативних игара играчи формирају **коалиције** које им служе за

међусобно координисање понашања и избор појединачних стратегија којима ће постићи најбољи могући резултат. Уколико код играча не постоји координисаност у понашању игра је некооперативна, тј. **антагонистичка**. За потребе математичког моделирања игра може бити представљена на више начина. Код игара где не постоји потпуна информисаност играча о потенцијалним одговорима противника резултат свих потеза обрачунава се тек на крају игре, када се реализује партија. Оваква врста игре – игра **општег (екстензивног) облика** – представља се преко одговарајућег стабла у коме се представљају одабрани потези играча. Код игара потпуне информисаности за све комбинације стратегија играча унапред су позната плаћања, док су код коначне игре два играча са нултом сумом дата матрицом исплате у којој су представљени резултати.

1.2 Просте матричне игре

Узмимо игру два играча са нултом сумом у нормалној форми где играч А располаже са *m* а играч В са *n* чистих стратегија. Пошто резултат који показује добитак играча одговара одређеном избору стратегија (A_i, B_j), представићемо га вредношћу a_{ij} која показује добитак играча А. Уколико је $a_{ij} < 0$ он исплаћује играчу В износ од $|a_{ij}|$, тј. његов добитак је негативан. Све могуће комбинације избора стратегија представљају се матрицом плаћања.

У општем случају матрица је дата у облику: $P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & aa_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$,

али се за потребе решавања игре често се даје у виду одговарајуће табеле.

A \ B	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_n
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Табела 1: Табеларно представљање матрице исплате
Table 1 – Tabular representation of payoff matrix

Игра дата претходном матрицом реализује се у условима када играчи приликом избора својих не знају које ће стратегије изабрати противник, па је њихов основни циљ да изаберу ону која ће им обезбедити најповољнији резултат. Анализирајући своје могуће добитке играч А за сваку чисту стратегију A_i (i=1,..,m) одређује минималан добитак који ће остварити без обзира на избор стратегије играча В, тј.одређује минималан елемент сваке од врста матрице у облику $\alpha = \min_j a_{ij}$, i=1,...,m, да би, затим, тражио њихов максималан елемент облика $\alpha = \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij}$ који представља максимин вредност, односно доњу границу игре, и показује његов гарантован добитак, који му је и оптимална стратегија. Играч В труди се да одабере такву стратегију која ће му донети минималан губитак, па за сваку од својих стратегија израчунава максималне губитке, тј. вредности $\beta = \max_i a_{ij}$ $j=1,...,n$. Минималан од овако одређених елемената, вредност $\beta = \min\beta_j = \min_j \max_i a_{ij}$, представља горњу границу вредности игре, тј. минимакс вредност за играча В, која је његова оптимална стратегија. Избором оптималних стратегија оба играча ризик услед различитог избора стратегија противника своде на минимум, односно обезбеђују себи најповољнији резултат. Уколико је доња граница игре једнака горњој таква игра је

проста матрична и назива се игра са седластом тачком. Седласта тачка се налази на пресеку оптималних стратегија за које су изједначене максимин и минимакс вредност, па се решавање просте матричне игре своди на налажења оптималних чистих стратегија, седласте тачке и вредности игре. Уколико је $\alpha<\beta$ играчи свој циљ остварују бирајући у низу потеза више стратегија. Бирање различитих стратегија играча А и В врши се случајним избором са одређеном вероватноћом и један такав избор представља мешовиту стратегију.

2.3 Матричне игре са мешовитим стратегијама

Уколико је игра два лица са нултом сумом дефинисана матрицом плаћања реда (m,n) мешовиту стратегију играча А можемо представити вектором $x=(x_1, ..., x_m)$ чији елементи приказују вероватноће са којима он бира одређене стратегије, па мора бити задовољено $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., m)$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$. Мешовиту стратегију играча В представићемо векотором $y = (y_1, ..., y_n)$ за који важи $y_i \geq 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$. Опредељивање играча за играње било које стратегије као чисте представља специјалан облик мешовите стратегије, где су вероватноће бирања свих стратегија 0 изузев чисте, чија је вероватноћа 1. Све стратегије за које су вероватноће x_i и y_j веће од 0 представљају активне стратегије.

Ако играчи А и В бирају стратегије A_i і B_j са вероватноћама x_i и y_j, тада вероватноћу истовременог избора ове две стратегије одређујемо њиховим производом x_iy_j. При низу избора стратегија дефинисаних мешовитим стратегијама потенцијални добитак играча представља случајну величину која зависи од вектора x_i и y_j и матрице плаћања, па вредност игре можемо представити у виду очекиване средње вредности $v = f(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$,или, у матричном облику $v = f(x, y) = xPy'$, где $f(x,y)$ представља функцију плаћања, x и y векторе мешовитих стратегија играча А и В, а Р матрицу исплате.

2.4 Решавање матричних игара са мешовитом стратегијом

Основна теорема теорије игара показује да свака коначна игра има једно решење на основу кога могу бити опредељене мешовите стратегије. До решења се долази на основу намере сваког играча да оствари најбољи могући резултат. Уколико и овде применимо принцип минимакса, избор оптималне мешовите стратегије играча А, x^*, обезбеђује му максимзацију очекиваног минималног добитка,тј добитак не мањи од вредности игре,па је

$$f(x^*, y) = \sum_{i=1}^{m} x^*{}_i a_{ij} \geq v \qquad j = 1, ..., n \tag{1}$$

где је $f(x^*, y) = \max_x \min_y f(x, y) = \alpha$ доња граница игре. Избор оптималне мешовите стратегије y^* за играча В значи да његов губитак неће бити већи од вредности игре, тј.

$$f(x, y^*) = \sum_{j=1}^{m} y^*{}_j \, a_{ij} \leq v \quad j = 1, ..., n \tag{2}$$

где је $f(x, y^*) = \min_y \max_x f(x,y) = \beta$ горња граница вредности игре,па се за оптимални избор мешовитих стратегија играча А и В остварује једнакост доње и горње границе вредности игре, тј. $\max_x \min_y f(x, y) = \min_y \max_x f(x, y) = f(x^*, y^*) = v$, односно $\alpha=\beta=v$, па се остварује равнотежа игре у којој вредност v представља просечан добитак играча.

Решавање матричне игре, када се не ради о простој, своди се на тражење оптималних мешовитих стратегија играча и одговарајуће вредности игре, па се, зависно од врсте и димензије матрице исплате, решавају на различите начине. Игре чија је матрица облика (2,*n*) или (*m*,2) могу се решавати аналитичким и графичким путем, па се, због једноставности поступка решавања, игре реда (*m,n*), *m,n*>2, покушавају свести на тај облик. Ако такво упрошћавање није могуће користи се модел линеарног програмирања.

2.4.1 Решавање игре реда 2x2

Игра два играча са нултом сумом реда 2x2 дата је матрицом плаћања облика $P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. У поступку решавања било које игре прво утврђујемо максимин и минимакс вредности и да ли се на основу њих могу изабрати оптималне чисте стратегије и вредност игре. Уколико чисте стратегије не постоје неопходно је одредити оптималне мешовите стратегије и одговарајућу вредност игре. У условима остваривања оптималних мешовитих стратегија оба играча доња и горња граница игре су једнаке и опредељују вредност игре, па њихово одређивање представља начин решавања. Да би игра реда 2x2 представљала мешовиту матричну игру неопходно је претпоставити да су обе стратегије за оба играча активне. Сагласно релацији (2) имамо систем једначина које морају бити задовољене за оптималне мешовите стратегије. За играча А то је систем:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 &= v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 &= v \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad (3)$$

где прва и друга једначина показују могуће добитке играча А зависно од избора стратегије играча В, док трећа произилази из особине вредности елемената мешовите стратегије који показују вероватноће опредељивања за њих, па њихов збир мора бити једнак 1. У систему (3) десне стране прве две једначине су једнаке, па након изједначавања левих страна и заменом $x_2 = 1 - x_1$ имамо: $a_{11}x_1 + a_{21}(1-x_1) = a_{12}x_1 + a_{22}(1-x_1)$, па је

$$x_1 = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}},\ x_2 = \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}.$$

Вредност игре коју добијамо заменом у једначинама система (3) је $v = \frac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}$.

Примењујући исти поступак на играча В добијамо систем једначина

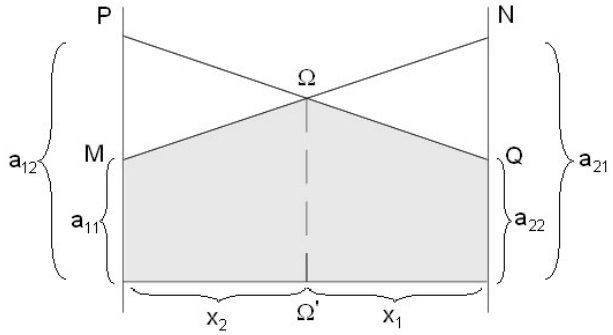
$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 &= v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 &= v \\ y_1 + y_2 &= 1 \end{aligned} \qquad (4)$$

одакле добијамо оптималне мешовите стратегије у облику

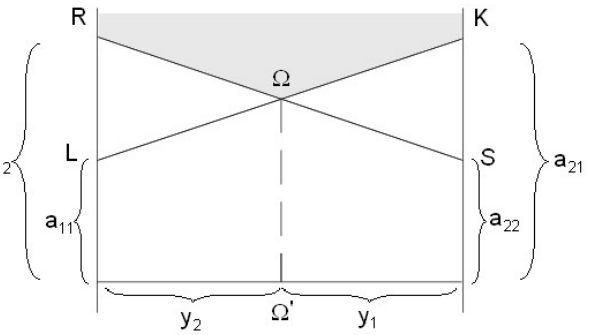
$$y_1 = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}},\ y_2 = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}.$$

Пошто вредности оптималних мешовитих стратегија изједначавају горњу и доњу границу игре, вредност игре добијена из система (4) једнака је вредности из система (3).

Да би игру решили графичким путем, у тачки (1,0) повлачимо помоћну ординату која нам заједно са основном служи за одређивање зоне добитка играча. Након наношења помоћне ординате, на основну ординату и њу наносимо вредности добитака које ће играч А остварити у случају избора прве, односно друге стратегије играча В.



Слика 1: Добитак играча А
Picture 1: Player A's payoff



Слика 2: Добитак играча В
Picture 2: Player B's payoff

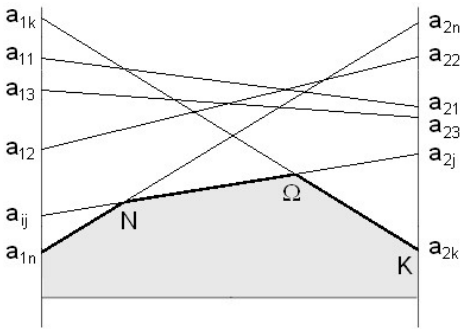
Наношењем вредности добитака играча А за прву и другу стратегију играча В одређујемо дужи MN и PQ, тј. тачку пресека Ω. Пошто ординате свих тачака које се налазе на кривој MΩQ и испод ње представљају гарантоване добитке играча А, Ω представља његову максимин вредност, односно доњу границу игре, чија пројекција на апсцису Ω' показује релативан однос прве и друге стратегије, тј. дели дуж (0,1) у односу x_1:x_2.

Поступак решавања за играча В је веома сличан, и своди се на наношење вредности губитака за прву и другу стратегију играча А на главну и помоћну ординату, чиме добијамо криву RΩK чије све тачке, као и тачке изнад ње, представљају потенцијалне губитке играча В. Тачка пресека Ω' овде представља минимакс вредност, тј горњу границу вредности игре, док њена пројекција на апсцису дели дуж (0,1) у размери $y_2 : y_1$.

2.4.2 Решавање игара реда (2,n) и (m,2)

Решавање оваквих игара реализује се тако што се графичким представљањем могућих резултата игре за играча који има две стратегије опредељују активне стратегије противника на основу којих се израчунава вредност игре и оптималне стратегије.

Посматрајмо игру дефинисану матрицом плаћања $P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}$. Узмимо да је мешовита стратегија играча А дата вектором $x = (x_1, x_2)$, а играча В $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Да би одредили вредности мешовитих стратегија и одговарајућу вредност игре, представићемо на графику добитке играча А зависно од избора стратегије играча В, да бисмо, затим, по принципу максимина определили активне стратегије играча В, чиме игру сводимо на 2x2.



Слика 3: Решавање игре реда (2,*m*)
Picture 3: Solving of

Као што видимо на слици 3, гарантовани добици играча А налазе се на кривој MNΩK и испод ње. Тачка Ω представља максимин вредност, односно доњу границу вредности игре, и, пошто се налази на пресеку *j*-те и *к*-те стратегије играча В, ове стратегије сматрамо активним, на основу чега игру реда (2,*n*) сводимо на игру реда 2x2, па решење игре одређујемо матрицом плаћања $P = \begin{bmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{bmatrix}$.

2.4.3 Редукција матрице исплате

Уколико је игра дата матрицом плаћања реда (m,n), за $m,n>2$, за коју не постоје чисте стратегије, матрицу покушавамо свести на један од облика погодних за решавање. Најчешће коришћен такав поступак је редукција применом правила доминације.

Размотримо дати пример.Рационално играње играча А подразумева његово настојање да оствари што бољи резултат у датим условима. Због тога никада неће играти оне стратегије које су лошије у односу на било коју од осталих. Уколико у матрици елементи неке k-те врсте нису мањи од елемената неке l-те врсте ($a_{kj} \geq a_{lj}$, j=1,...,n) добитак играча А не може бити мањи уколико изабере стратегију A_k од добитка стратегије A_l за било коју стратегију играча В, па је зато стратегија A_k погоднија од A_l, те њу сматрамо доминантном, а A_l доминираном. Пошто играч А никада неће изабрати доминирану стратегију, врсту матрице која је представља можемо елиминисати а да се не промени вредност игре и оптималне мешовите стратегије. Уколико се догоди да играч А бира између две стратегије чији су резултати исти елиминисаће било коју од њих. Сличан поступак важи и за играча В, при чему се у обзир узима вредност губитка који ће му донети одређене стратегије. Поред примене правила доминације, за редукцију матрице исплате користе се и метод линеарне комбинације могућих решења, метод просека и други.

2.4.4 Решавање игара коришћењем линеарног програмирања

Као што смо претходно видели, у случају постојања мешовитих стратегија аналитички поступак своди се на решавање система од $m+n$ неједначина (1 и 2), па, ако имамо матрицу исплате реда (m,n), за играча А, у условима остваривања оптималне стратегије, имамо да је

$$\sum_{i=1}^{m} x^* a_{ij} \geq v\,, j = 1, 2, ..., n, \tag{5}$$

при чему је $\sum_{i=1}^{m} x^* = 1$ и x_i^* (i = 1, 2, ..., m) вероватноћа избора i-те оптималне стратегије, а v вредност игре (доња граница). Слично важи и за играча В, где имамо

$$\sum_{i=1}^{m} y^* a_{ij} \leq v\,,\ j = 1, 2, ..., m \tag{6}$$

за $\sum_{i=1}^{n} y^* = 1$, док v представља горњу границу вредности игре, тј. вредност игре у условима реализације оптималних стратегија оба играча. Услове (5) можемо представити и у облику

$$\begin{aligned} &a_{11}\,x_1 + a_{21}\,x_2 + ... + a_{m1}\,x_m \geq v \\ &a_{1n}\,x_1 + a_{2n}\,x_2 + ... + a_{mn}\,x_m \geq v \\ &x_1 + x_2 + ... + x_m = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Да би извршили погодну трансформацију делимо леву и десну страну са v, при чему морамо имати задовољен услов $v>0$. Пошто је v непознато, услов ће бити задовољен трансформацијом матрице која се добија тако што сваком елементу матрице додамо број који је већи од апсолутне вредности најнижег елемента, након које имамо да је $a_{ij}>0$, за свако i, j.. Елементе нове матрице добијамо у облику $P'=a_{ij}+A$. Оваква промена не утиче на промену оптималних стратегија, с тим што се вредност игре добија у облику $v' = v+A$.

Пошто извршимо поделу са v, систем (7) можемо представити у облику

$$\begin{aligned} &a_{11}\,t_1 + a_{21}\,t_2 + ... + a_{m1}\,t_m \geq 1 \\ &a_{1n}\,t_1 + a_{2n}\,t_2 + ... + a_{mn}\,t_m \geq 1 \\ &t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{v} \end{aligned} \tag{8}$$

где је $t_i = \frac{x_i}{v}$ за i=1, 2, ..., m.

Пошто се решење игре реализује максимизацијом доње границе вредности игре, односно саме вредности игре када играчи бирају оптималну стратегију, у систему (8) ћемо то представити минимизацијом вредности функције $W = \sum_{i=1}^{m} t_1$, на основу чега, додавањем услова ненегативности променљивих, можемо представити модел линеарног програмирања у облику

$$\begin{aligned} &(min)W = t_1 + t_2 + ... + t_m \\ &a_{11}\, t_1 + a_{21}\, t_2 + ... + a_{m1}\, t_m \geq 1 \\ &a_{1n}\, t_1 + a_{2n}\, t_2 + ... + a_{mn}\, t_m \geq 1 \\ &t_1, t_2, ..., t_m \geq 0 \end{aligned} \tag{9}$$

чијим решавањем добијамо оптималне стратегије играча А у облику $x_i = t_i\, v$, за $v = \frac{1}{W}$.

За одређивање оптималне стратегије играча В, услове (6) представићемо у облику

$$\begin{aligned} &a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 + ... + a_{m1}\, y_n \leq v \\ &a_{m1}\, y_1 + a_{m2}\, y_2 + ... + a_{mn}\, y_n \leq v \\ &y_1 + y_2 + ... + y_n = 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Делећи систем са v добијамо

$$\begin{aligned} &a_{11}\, u_1 + a_{21}\, u_2 + ... + a_{n1}\, u_n \geq 1 \\ &a_{1m}\, u_1 + a_{m2}\, u_2 + ... + a_{mn}\, u_n \geq 1 \\ &u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{1}{v} \end{aligned} \tag{11}$$

за $u_j = \frac{y_j}{v}$, j=1, 2, ..., n. Променљиве u_j (j = 1, 2, ..., n), имајући у виду захтев за минимизацијом вредности горње границе вредности игре, имају оптималне вредности када се остварује максимум функције $Z = \sum_{j=1}^{n} u_j$, па модел за одређивање оптималне стратегије за играча В можемо представити као модел линеарног програмирања облика

$$\begin{aligned} &(max)Z = u_1 + u_2 + ... + u_n \\ &a_{11}\, u_1 + a_{21}\, u_2 + ... + a_{m1}\, u_n \leq 1 \\ &a_{1m}\, u_1 + a_{2m}\, u_2 + ... + a_{mn}\, u_n \leq 1 \\ &u_1, u_2, ..., u_n \geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

на основу кога, за оптимално решење, оптималне стратегије одређујемо у облику $y_j = u_j\, v$, за j = 1, 2, ..., n, док је $v = \frac{1}{Z}$.

Као што видимо, задаци линеарног програмирања су у дуалном односу, тј. решавањем једног добијамо решење другог проблема, што овај модел овај модел чини веома погодним приступом за одређивање оптималних мешовитих стратегија и вредности игре.

3. Резултати истраживања и дискусија

Пример 1. Наћи вредност и оптималне стратегије игре дате матрицом $P=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Решење: Пошто анализирањем матрице исплате закључујемо да не постоји седласта тачка, покушаћемо да сведемо матрицу на неки од облика погодних за решавање ((2,n), (2x2)). Размотрањем стратегија играча B (колоне) видимо да је прва стратегија доминирана другој, а четврта трећој, па ћемо их елиминисати, после чега добијамо матрицу облика $P=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Анализом стратегија играча A видимо да је друга стратегија доминантна првој, а четврта трећој,па њиховом елиминацијом добијамо матрицу $P=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ реда 2x2.

Применом аналитичког метода оптималне мешовите стратегије играча и вредност игре су $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{1}{2}$; $y_2=\frac{3}{4}$, $y_3=\frac{1}{4}$; $v=\frac{1}{2}$, па оптималне стратегије можемо представити у виду вектора x=(0, ½, ½, 0) и y=(0,¾, ¼, 0). Према томе играч A треба по 50% од укупног броја потеза да игра другу и трећу стратегију да би остварио добитак од, ½ а играч B 25% другу а 75% трећу стратегију да би остварио исти губитак.

Пример 2. Дата је матрица игре P_{3x3} облика $P=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Одредити оптималне мешовите стратегије и очекивану вредност игре.

Решење: Да би применили линеарно програмирање морађемо да формирамо нову матрицу P' трансформацијом $a_{ij} = a_{ij} + A$, где је A број за 1 већи од апсолутне вредности минималног негативног елемента матрице P, у овом случају –1, па сваком елементу матрице увећавамо вредност за 2, одакле је $P'=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Примарни и дуални проблем сада можемо представити у облику:

Примарни проблем (за играча B)

$$(\max)Z = u_1 + u_2 + u_3$$
$$5u_1 + 2u_2 + 5u_3 \leq 1$$
$$7u_1 + 6u_2 + 4u_3 \leq 1$$
$$4u_1 + u_2 + 5u_3 \leq 1$$
$$u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

Дуални проблем (за играча A)

$$(\min)W = t_1 + t_2 + t_3$$
$$5t_1 + 7t_2 + 4t_3 \geq 1$$

$$2t_1 + 6t_2 + t_3 \geq 1$$
$$5t_1 + 4t_2 + 5t_3 \geq 1$$
$$t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

Постављени примарни задатак решавамо увођењем додатних променљивих након чега добијамо задатак представљен у матричном облику

$$(\max)Z = (1,1,1,0,0,0)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_6 \end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix} 5 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};\quad u_1, u_2, \dots, u_6 \geq 0$$

Оптимално решење добија се за базу $a_{opt} = (A_2, A_3, A_6)$,
где је $u_1 = 0$
$u_2 = 0.045$
$u_3 = 0.182$
$u_6 = 0.045$
$(\max)Z = 0.227$
док је оптимално решење дуалног проблема
$t_1 = -(c_4 - z_4) = 0.091$
$t_2 = -(c_5 - z_5) = 0.136$
$t_3 = 0$
при чему је $(\max)Z = (\min)W = 0.227 = k$, на основу чега имамо да је вредност игре

$$v' = \frac{1}{k} = \frac{1}{0.227} = 4.4052863$$

одакле оптималне мешовите стратегије за играче А и В добијамо из израза
$x_i = t_i v'$, $i = 1, 2, 3$; $y_j = u_j v'$, $j=1, 2, 3$, па за играча А имамо: $x_1 = 0.40$; $x_2 = 0.60$; $x_3 = 0$,
а за играча В: $y_1 = 0$; $y_2 = 0.20$; $y_3 = 0.80$.
Пошто је матрица Р' добијена трансформацијом $a_{ij} = a_{ij} + A$, вредност игре је
$v = v' - 2 = 2.4052863$
колико износи просечан добитак играча А, односно губитак играча В.

4. Закључак

Иако релативно млада област математике, теорија игара се врло брзо развила нашавши примену у широком спектру поља, како практичну (у економији), тако и теоријску (у логици, биологији). У овом раду дати су неки основни појмови методи рада који могу послужити као основа за даљи рад и (евентуално) развој ове области.

Литература

[1.] Др М. Бацковић, др Ј. Вулета - Економско математички методи и модели, Економски факултет Београд,