САВРШЕНИ БРОЈЕВИ
PERFECT NUMBERS

Аутор

ПЕТАР ПРВУЛОВИЋ

I година гимназије

Регионални центар за таленте Пожаревац

Ментор

МИЛОСАВ МИЛЕНКОВИЋ

Професор математике, Гимназија “Света Ђорђевић”

РЕЗИМЕ

Савршени бројеви, као област чији почеци проучавања сежу назад у прошлост старе Грчке, у време Еуклида, и раније, и данас садржи отворена питања. Једно од, за математику веома важних, таквих проблема су и прости бројеви – да ли их има бесконачно много, или је њихов број коначан (пошто је потрага за савршеним истовремено и потрага за простим бројевима). раду је на јасан начин објашњено дефинисање скупа савршених бројева, њихово налажење, као и поједине особине које они поседују.

Кључне речи: делилац, број, савршен, прост, пријатељски, Еуклид, Мерсен

Савршени бројеви

1.1 Увод -историја проучавања савршених бројева.

Претпоставља се да су још стари египћани располагали знањима која би им омогућила уочавање појединих особина бројева (између осталог и проналажење савршених бројева), али се први писани подаци о томе срећу тек у Еуклидовим "Елементима" где је дата дефиниција савршених бројева и формула за њихово налажење. Еуклид је савршене бројеве дефинисао као "број чији је збир правих делилаца[1)] једнак њему самом". У његово време било је познато четири таква броја: 6, 28, 496 и 8128, од којих је он пронашао друга два. И Питагорејци су се касније бавили проучавањем тих бројева, да би из њиховог рада проистекла мало модернија дефиниција савршених бројева, коју и математичари данашњице користе, а која се заснива на пријатељским бројевима.

1.2 Пријатељски бројеви

По једној анегдоти, када су Питагору питали: "Шта је то пријатељ?" он је одговорио: "Пријатељ – то је друго ја, пријатељство – то је однос међу бројевима 220 и 284."

Вероватно отуда и потиче њихов назив "пријатељски". Особина која спаја ове бројеве и чини их "пријатељима" је то да је збир свих правих делилаца првог броја једнак другом броју, и обрнуто, збир правих делилаца другог броја једнак је првом броју. У овом случају збир правих делилаца броја 220 је 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284; аналогно томе збир правих делилаца броја 284 је 1+2+4+71+142=220. Ако то уопштимо, добијамо

$S_{(a)} - a = b$, $S_{(b)} - b = a$, одакле је $S_{(a)} = S_{(b)} = a + b$.

Досад је пронађен мали број парова пријатељских бројева. Неки од њих су 220 и 284, 1184 и 1210, 2620 и 2924... На проналажењу парова пријатељских бројева, као и начина за њихово добијање, радили су и неки славни математичари – Ферма, Ојлер, Декарт и др. Ферма је 1636. године нашао пар пријатељских бројева 17296 и 18415. Он и Декарт су независно један од другог дали правило за налажење пријатељских парова бројева (али не свих), не знајући да га је још у IX веку формулисао један арапски астроном. Декарт је нашао пар 9363584 и 9437056. Ојлер је у XVIII веку нашао преко 60 пари пријатељских бројева, међу којима је и пар 17296 и 18416, који је Ферма већ био нашао. Други по величини пар пријатељских бројева, 1184 и 1210, који су сви били превидели, нашао је 1867. године 16-годишњи италијан Б. И. Паганини.

[1)] Прави делиоци броја – сви природни делиоци мањи од тог броја

До сада је познато око 600 парова пријатељских бројева, али се не зна да ли је њихов број коначан, или их има бесконачно много. Дефинисане су одређене формуле за добијање пријатељских парова бројева, али још увек није нађена општа формула за добијање свих парова пријатељских бројева. Сваки од познатих парова се састоји или од два парна броја, или од (знатно ређе) два непарна броја. Још увек није пронађен ниједан мешовит пријатељски пар, али није ни доказано да такви парови не постоје. Постоји хипотеза да су сви непарни пријатељски бројеви дељиви са 3, и да је збир бројева који образују пријатељски пар дељив са 9.

2.1 Дефинисање скупа савршених бројева. Еуклидова теорема

По Еуклидовој дефиницији савршен број је онај број који је једнак збиру својих правих делилаца, тј. који је пријатељски сам себи. Пратећи дефиницију пријатељских бројева то можемо записати у облику $S_{(n)} - n = n$, тј. $S_{(n)} = 2n$.

У уводу је поменута Еуклидова формула за налажење савршених бројева. Она гласи: Сваки број n, облика $n=2^{k-1}(2^k-1)$, где је природан број $k>0$, и $2^k-1=p$ прост број, је савршен број. Самим тим, за такав број $n=2^{k-1}p$, по формули за збир делилаца, важи:

$$S_{(n)} = \frac{2^k - 1}{2 - 1} \cdot \frac{p^{1+1} - 1}{p - 1} = (2^k-1)\cdot(p+1) = p\cdot 2^k = 2\cdot 2^{k-1}\cdot p = 2n.$$

За бројеве $k\leqslant 7$, теорема је тачна (2^k-1 је прост) и помоћу њих се добијају прва четири савршена броја.

После Еуклида (који је и учинио први корак у изградњи теорије савршених бројева) крупнији корак у напредовању ове области направио је тек 2000 година касније Л. Ојлер. Дорадивши Еуклидову формулу доказао је да k мора бити прост број, и да се помоћу те формуле могу пронаћи само парни савршени бројеви, оставивши притом питање постојања непарних бројева отвореним до данашњих дана. Важно је напоменути да није пронађен ниједан непаран савршен број, нити се поуздано може тврдити да такви бројеви не постоје. Такође није доказано да ли савршених бројева има бесконачно много (иако већина подржава то мишљење).

Ојлерова теорема: Парни савршени бројеви имају облик $n=2^{k-1}(2^k-1)$,где је природан број $k>1$ и 2^k-1 прост број.

Доказ: Из услова да је број n паран следи, будући да он има обик $n=2^{k-1}u$, где је природан број $k>0$, а u-непаран прост број,да је $(2^{k-1},u)=1$ и $S_{(u)}=S_{(2^{k-1})}\cdot S_{(u)}=(2^k-1)\cdot S_{(u)}$.

Пошто је n савршен број, имамо да је $S_{(n)} = 2n = 2^k \cdot u$, тј. $(2^k-1) \cdot S_{(u)} = 2^k \cdot u$, што нам даје могућност налажења облика броја u. Одатле имамо $(2^k, 2^k-1)=1$, из чега следи, узевши за $u = (2^k-1) \cdot t$ (t – природан број), да је $S_{(u)} = 2^k t$.

Број u има два различита делиоца: t и $u = (2^k-1) \cdot t > t$ (јер за $k>1$, $2^k-1>1$). Али ако је њихов збир једнак $2^k \cdot t$, тј. $S_{(u)}$, такви бројеви садрже све природне делиоце u.

Уколико број p има тачно два природна делиоца, 1 и p, јасно је да је, за $t=1$ и $u=(2^k-1)t = (2^k-1)1=2^k-1=p$, прост број. Одавде се види да n има облик дат у Еуклидовој теореми. Теорема Ојлера и Еуклида показује да формула $n=2^{k-1}(2^k-1)$, где је $k>1$ и 2^k-1 прост број, представља све парне савршене бројеве.

Горе је поменуто да није утврђено да ли савршених бројева има бесконачно или не. Аналогно томе разматра се питање бројева облика 2^k-1, чинилаца сваког савршеног броја. Очигледан је закључак да се налажење парних савршених бројева заснива на проналажењу простих бројева овог облика. Проучавањем таквих бројева бавио се француски математичар Мерсен, који је са Фермом радио на њима, па су по њему овакви бројеви добили име Мерсенови прости бројеви.

2.2 Мерсенови прости бројеви

У својим преписима са Фермом, Мерсен је дошао до пар корисних доказа који су олакшали проналажење савршених бројева. До времена Ојлера било је познато 7 савршених бројева добијених од Мерсенових простих бројева за изложилац p=2, 3, 5, 7, 13, 17 и 19. Ојлер је доказао да је $2^{31}-1$ прост број и он је био највећи пронађен такав број све до 1883. када је И. М. Первушин (1827 – 1900) доказао да је $2^{61}-1$ прост. У наступајућем времену пронађено је још таквих бројева облика 2^p-1, за изложилац p= 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203... при чему су, почевши од броја 521, бројеви налажени уз помоћ рачунара. До сад их је нађено 40. Највећи пронађен Мерсенов прост број је $2^{20996011}-1$. Пронађен је у Новембру 2003. године преко GIMPS (Great Internet Mersene Primes Search), рачунарске мреже развијене управо у ову сврху и има 12.640.859 цифара.

Један од најважнијих Мерсенових доказа је да је изложилац k увек прост, чиме су време и израчунавања потребна за налажење савршених бројева умногоме смањена. Пошто је број 2^k-1 прост, следи да је изложилац k такође прост број. Пођимо од тога да сваки број има бар два делиоца, па изложилац k можемо записати у облику $k=k_1 \cdot k_2$. Одавде $2^k-1=(2^{k_1})^{k_2}-1$ можемо разложити на просте делиоце (број чији су делиоци 1 и он сам), од којих је један $2^{k_1}-1$

2.3 Функције за налажење простих бројева

Многи математичари налазили су такве функције *f(x)* које би за одређен интервал *x* давале просте бројеве. Уз помоћ такве једне функције било би могуће наћи колико год нам је потребно простих бројева, ако би она важила за било које цело *x*. Ојлер је нашао доста простих бројева коришћењем квадратних функција са том особином. На пример изрази x^2+x+17 за $x = 0, 1, 2, 3, ..., 15$, и x^2-x+41 за $x=0, 1, 2, \ldots, 40$ дају само просте бројеве. Још неки такви полиноми су и $2x^2 + 29$ за $x=0\ 1, \ldots, 28$, $x^2 + x + 41$ за $x=0, 1, .., 39$, $x^2 - 79x + 1601$ за $x=0, 1, .., 79$. Нађено је још много полинома *f(x)* који за $x=0, 1, 2, \ldots, k$ дају просте бројеве, али ниједан који би важио за свако *x*. Чак је Х. Голдбах поставио теорему која гласи: ниједна цела рационална функција од *x* са целим коефицијентима не може за било који природан број *x* да да прост број.

Доказ: Нека је $f(x)=a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ и $f(a)=p$, за *p*-прост број. Тада за неко целобројно *t* имамо:

$$f(a+pt)=f(a)+ptf'(a)+(pt)^2\cdot\frac{f''(a)}{2!}+\ \ldots\ +(pt)^n\cdot\frac{f^{n}(a)}{n!},$$

одакле је очигледно, пошто је *f(a+pt)* дељиво са *p*, да је дељив са *p*.

Затим, ако је и *f(a+pt)* прост број, то мора бити *f(a+pt)=p* за свако целобројно *t*, у том броју и за $t \to \infty$ Таквим обрасцем *f(x)* не може за сваку природну вредност *x* бити прост број.

3. Неке особине савршених бројева

Савршени бројеви поседују доста интересантних особина, од којих се неке лако запажају, док друге захтевају дубље проучавање.

Једна од интересантнијих је да је збир реципрочних вредности *свих* делилаца 2. Узмимо за пример број 28: $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2$

На први поглед делује фасцинантно, али ако се мало више удубимо видећемо да ова особина произилази директно из дефиниције савршених бројева.

Ако размотримо листу савршених бројева[3)] запазићемо да се сви пронађени савршени бројеви завршавају на 6 или 8 (не важи правило да се 6 и 8 наизменично смењују), и претпоставља се да ово правило важи за све савршене бројеве.

Саберимо цифре било ког савршеног броја (осим броја 6), па затим сабиремо цифре новодобијеног броја, и поновимо тај поступак све док нам не остане једноцифрен број.

[3)] Листа се налази у додатку А

Тај број ће увек бити 1.

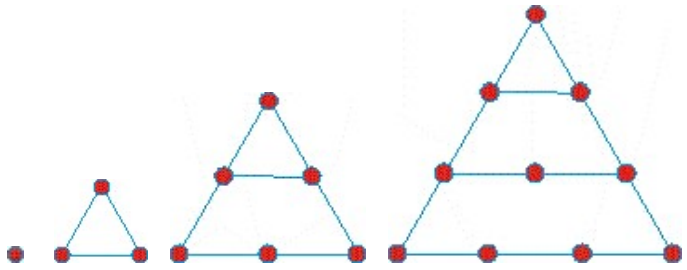
$$28 \rightarrow 2 + 8 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$$

$$496 \rightarrow 4 + 9 + 6 = 19 \rightarrow 1 + 9 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$$

$$8128 \rightarrow 8 + 1 + 2 + 8 = 19 \rightarrow 1 + 9 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$$

Означимо са $S_{(n)}$ збир цифара броја n. Лако се закључује да је $S_{(n)} \equiv n \pmod 9$. Да би доказали теорему треба да докажемо да су савршени бројеви конгруентни са 1 по модулу 9. Ако је n савршен број, онда он има облик $2^{p-1}(2^p-1)$, где је p прост, па је p 2, 3 или је конгруентан са 1 или 5 по модулу 6. Приметимо да смо искључили случај p=2 (n=6). Коначно, по модулу 9, степени 2 понављају се периодом 6 (тј. $2^6 \equiv 1 \pmod 9$)), па је n конгруентно по модулу 9 са једним од следећих бројева $2^{1-1}(2^1-1)$, $2^{3-1}(2^3-1)$, or $2^{5-1}(2^5-1)$, који су сви конгруенти са 1 (mod 9).

Сви савршени бројеви су “троугаони”. Троугаони бројеви су сви они бројеви који се графички могу представити тако да образују троугао. Графички представљено то изгледа овако:



Слика 1 - Формирање троугаоних бројева

Picture 1 – Forming triangular numbers

Очигледно је да сви троугаони бројеви садрже део низа 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n, па је

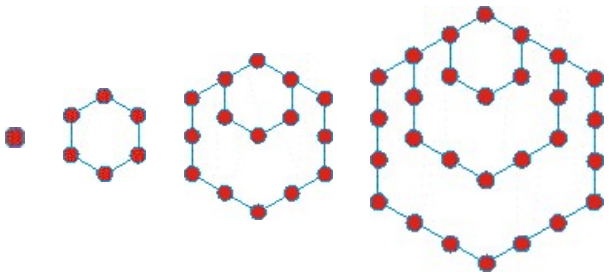
T_1 =1, T_2=1+2=3, T_3=1+2+3=6, T_4=1+2+3+4=10, T_5=1+2+3+4+5=15…

Сваки број овог низа увек има облик $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Интересантна је прича о настанку ове формуле: Једном је учитељ дао ученицима у разреду да израчунају збир бројева до 100. На опште изненађење Карл Ф. Гаус, тада ученик, а касније велики математичар,готово моментално је устао са одговором 5050. Учитељ га је питао како је то тако брзо израчунао, и Гаус му је објаснио да је, уместо да сабира редом бројеве од 1 до 100, сабрао први и задњи број тог низа, 1+100=101, затим други и предзадњи (2+99=101) итд. да би добио 50 таквих парова којима је збир 101. Простим

множењем 50·101=5050 долазимо до решења. Одавде се види да је збир свих бројева од 1 до n $\frac{n}{2}(n+1)$ где је $\frac{n}{2}$ број парова, а $n+1$ збир сваког пара. Ако сад формирамо низ троугаоних бројева уочићемо да се у њему налазе сви савршени бројеви.

Ова особина јавља се и код шестоугаоних бројева. Шестоугаони бројеви су, аналогно троугаоним, бројеви који се графички могу представити у облику шестоугла.



1 6 15 28

Слика 2 Формирање шестоугаоних бројева

Picture 2 Forming hexagonal numbers

Троугаони бројеви садрже у себи део низа 1 + 2 + 3 + ... + n. Код шестоугаоних бројева мало је сложеније. Узмимо за пример број 28. Он се добија следећим сабирањем: 1+5+5+4+5+4+4=28 (разлика између бројева 1 и 6 је 5, тј. 1+5=6, између 6 и 15 је 9, 6+9=15, тј 6+5+4=15 итд.) које, ако га уопштимо, добија облик:
$1 + 5_0 + 0\cdot4 + 5_1 + 1\cdot4 + 5_2 + 2\cdot4 + \ldots + 5_n + n\cdot4$, тј. $1 + (n+1)\,5 + (1+2+\ldots+n)\cdot4$. Пошто низ $1+2+..+n$ представља троугаони број, добијамо облик $1 + 5(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}.4$. Даљим скраћивањем долазимо до облика $1+5(n+1)+2n(n+1)$. Пошто формирамо низ шестоугаоних бројева уочићемо да се у њему налазе сви савршени бројеви.

Сваки од познатих савршених бројева осим првог (тј. Осим 6) једнак је збиру кубова првих неколико узастопних непарних бројева.

$V_2 = 28 = 1^3 + 3^3$

$V_3 = 496 = 1^3 + 3^3$

$V_4 = 8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$

$V_5 = 33550336 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + 125^3 + 127^3$, итд.

Ако савршене бројеве запишемо у бинарном облику добијамо низ:

$V_1 = 6 = 2^1(2^2 - 1)$ 110

$V_2 = 28 = 2^2(2^3 - 1)$ 11100

$V_3 = 496 = 2^4(2^5 - 1)$ 111110000

$V_4 = 8128 = 2^6(2^7 - 1)$ 1111111000000 итд

Ако се мало боље размотри, уочиће се веза између ова два низа: број јединица у бинарном запису броја једнак је изложиоцу p у декадном запису, а број нула једнак је p-1.

4. Закључак

Потрага која је започела још у давна времена, и која траје и до данашњих дана заокупљајући пажњу математичара данашњице истом јачином као и у време старе Грчке, када је први пут и започет рад на њима – потрага за савршеним бројевима, данас све више и више добија на значају. Чак у толикој мери да је једна од најјачих глобалних мрежа, GIMPS, која се по обиму мери са NASA-иним пројектом SETI online, направљена првенствено у сврху налажења простих бројева. Будући да нема великог значаја и примене у математици, ова област није толико проучавана (захтевала је пуно рачунања, не дајући велике резултате), али појавом рачунара 50-их година прошлог столећа почиње обимније да се ради на њој, да би за релативно кратко време, 50 година, било пронађено више од половине досад познатих савршених бројева. Иако их је досад пронађено веома мало – само 40, и даље се трага за новим, јер потрага за савршеним бројевима истовремено представља и потрагу са простим бројевима (који су итекако значајни у математици).

И као закључак свега овога аутор би цитирао једну реченицу славног математичара Ренеа Декарта: ”Савршени бројеви су, као и савршени људи, веома ретки.”

	За изложилац n	Број цифара	Година проналаска	Проналазач
1	2	1	-	-
2	3	2	-	-
3	5	3	-	-
4	7	4	-	-
5	13	8	1456.	?
6	17	10	1588.	Каталди
7	19	12	1588.	Каталди
8	31	19	1772.	Ојлер
9	61	37	1883.	Первушин
10	89	54	1911.	Пауерс
11	107	65	191.	Пауерс
12	127	77	1876.	Лука
13	521	314	1952.	Робинсон
14	607	366	1952.	Робинсон
15	1279	770	1952.	Робинсон
16	2203	1327	1952.	Робинсон
17	2281	1373	1952.	Робинсон
18	3217	1937	1957.	Рајсел
19	4253	2561	1961.	Хурвиц
20	4423	2663	1961.	Хурвиц
21	9689	5834	1963.	Џилијес
22	9941	5985	1963.	Џилијес
23	11213	6751	1963.	Џилијес
24	19937	12004	1971.	Такерман
25	21701	13066	1978.	Нол и Никел
26	23209	13973	1979.	Нол
27	44497	26790	1979.	Нилсон и Словински
28	86243	51924	1982.	Словински
29	110503	66530	1988.	Кокит и Велч
30	132049	79502	1983.	Словински
31	216091	130100	1985.	Словински
32	756839	455663	1992.	Словински и Гејџ
33	859433	517430	1994.	Словински и Гејџ
34	1157787	757263	1996.	Словински и Гејџ
35	1398269	841842	1996.	Арменгауд (GIMPS)
36	2976221	1791864	1997.	Спенс (GIMPS)
37	3021377	1819050	1998.	Кларксен (GIMPS)
38	6972593	4197919	1999.	Хајратвала (GIMPS)
?	13466917	8107892	2001.	Камерон (GIMPS)
?	20996011	12640859	2003.	Клафер (GIMPS)

Табела 1. Листа савршених бројева
Table 1. List of perfect numbers

Литература

[1.] Ш. М. Михелович, Теория чисел, Высшая школа, Москва 1967.

[2.] Архимедесов материјал за младе математичаре